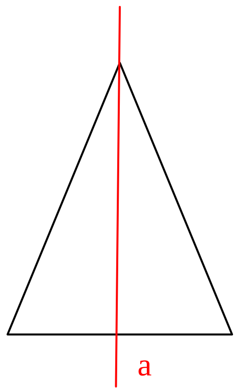
Grundwissen Mathematik Jahrgangsstufe 7

	Beispiele

I Symmetrie

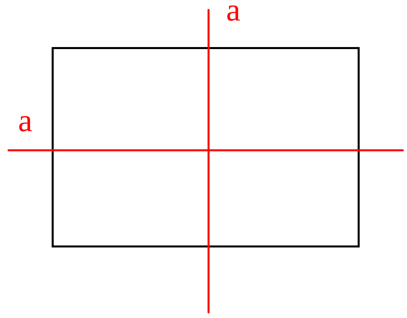
1. Achsensymmetrie

Figuren, die durch Spiegelung an einer Achse a in sich übergehen, nennt man achsensymmetrisch bezüglich der Achse a. Punkte, die auf der Symmetrieachse liegen – **und nur diese** – sind von zueinander symmetrischen Punkten gleich weit entfernt.



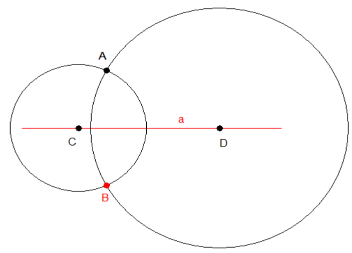
1.1 Eigenschaften achsensymmetrischer Figuren

- Die Verbindungsstrecke zwischen Punkt und Bildpunkt wird von der Symmetrieachse senkrecht halbiert.
- Symmetrische Strecken sind gleich lang (Längentreue).
- Symmetrische Winkel sind gleich groß (Winkeltreue).
- Der Umlaufsinn von Figuren ändert sich.
-



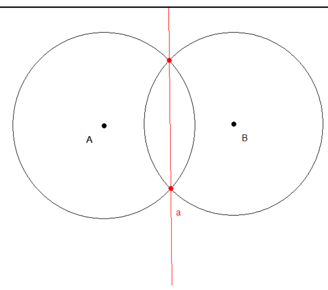
1.2 Konstruktionen

1.2.1 Konstruktion des Bildpunktes B
Man sucht sich auf der Achse a zwei beliebige Punkte C und D. Anschließend zeichnet man sowohl um C als auch um D einen Kreis, der jeweils durch den Punkt A geht. Dort wo die beiden Kreisen sich schneiden, befindet sich der Spiegelpunkt B.



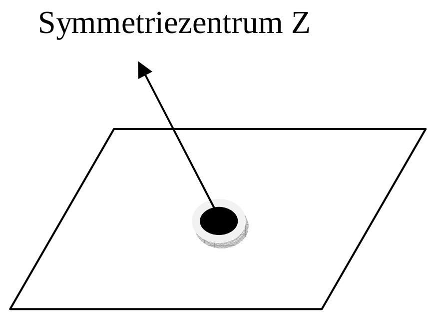
1.2.2 Konstruktion der Achse a

Man zeichnet um den Punkt A und seinen Spiegelpunkt B zwei Kreise mit gleichem genügend großem Radius, so dass sich die Kreise schneiden. Die Gerade durch die beiden Schnittpunkte ist die Symmetrieachse a.



2. Punktsymmetrie

Figuren, die bei einer Drehung um **180°** um einen Punkt **Z** mit sich selbst zur Deckung kommen, heißen **punktsymmetrisch**.



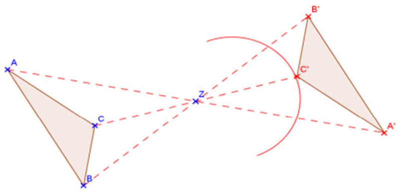
2.1 Eigenschaften punktsymmetrischer Figuren

- Die Verbindungsstrecke zwischen Punkt und Bildpunkt wird vom Symmetriezentrum halbiert.
- Symmetrische Strecken sind gleich lang (Längentreue).
- Symmetrische Winkel sind gleich groß (Winkeltreue).
- Der Umlaufsinn von Figuren ändert sich nicht.

2.2 Konstruktionen

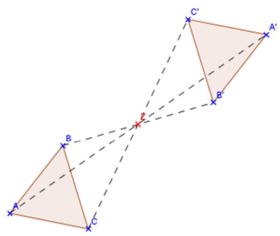
2.2.1 Konstruktion des Bildpunktes C

Um einen Punkt C am Zentrum Z zu spiegeln, zeichnet man die Halbgerade [CZ und einen Kreis um Z mit $r=\overline{AZ}$. Der Kreis schneidet die Halbgerade [CZ im Spiegelpunkt C`.



2.2.2 Konstruktion des Symmetrie-zentrums Z

Man verbindet die zwei Punkte mit ihren Spiegelpunkten. Das Symmetriezentrum Z befindet sich dort, wo sich die Verbindungsstrecken schneiden.



3. Grundkonstruktionen

3.1 Mittelsenkrechte m

Unter einer Mittelsenkrechte m einer Strecke [AB] versteht man die Gerade, die die Strecke [AB] halbiert und senkrecht schneidet.

<u>Konstruktion:</u>

Man muss die Symmetrieachse zwischen den Punkten A und B konstruieren und erhält die Mittelsenkrechte m.

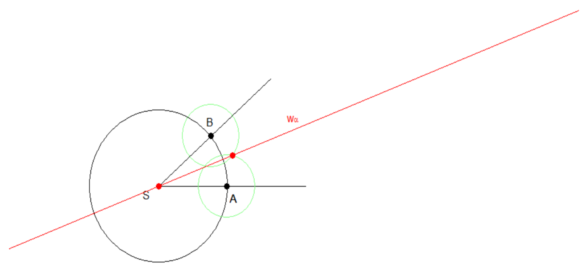
siehe Konstruktion einer Symmetrieachse!

3.2 Winkelhalbierende w_α

Unter der Winkelhalbierenden w_α eines Winkels versteht man die Gerade, die durch den Scheitel S geht und den Winkel α in zwei gleich große Hälften teilt.

<u>Konstruktion:</u>

Man zeichnet um den Scheitel S einen Kreis mit einem beliebigen Radius r. Dieser schneidet die beiden Schenkel im Punkt A und B. Danach konstruiert man die Symmetrieachse zwischen A und B (weil der Scheitel S bereits auf dieser Achse liegt, muss man nur einen weiteren Punkt konstruieren). Diese Symmetrieachse ist dann die Winkelhalbierende w_α.

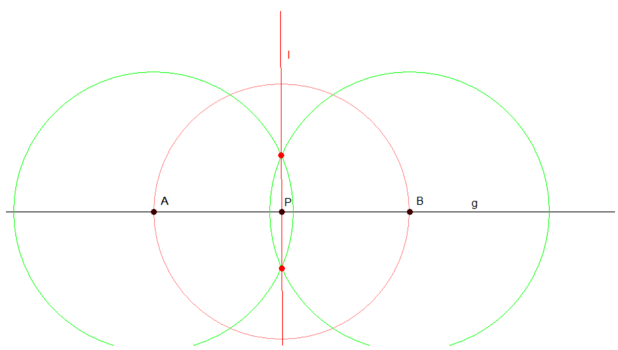


3.3 Lot l errichten (P liegt auf g)

Unter einem Lot versteht man eine Gerade l, die durch einen gegebenen Punkt P geht und senkrecht auf einer gegebenen Gerade g steht.

<u>Konstruktion:</u>

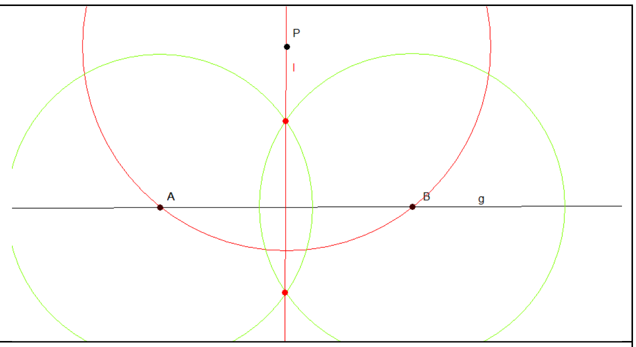
Man zeichnet um P einen Kreis mit beliebigem Radius r, der die Gerade g in zwei Punkten schneidet. Zwischen diesen Punkten konstruiert man anschließend die Symmetrieachse und erhält das Lot l.



3.4 Lot l fällen (P liegt nicht auf g)

<u>Konstruktion:</u>

Man zeichnet um P einen Kreis mit beliebigem Radius r, der die Gerade g in zwei Punkten schneidet. Zwischen diesen Punkten konstruiert man anschließend die Symmetrieachse und erhält das Lot l.



4. Konstruktion von Kreis-tangenten

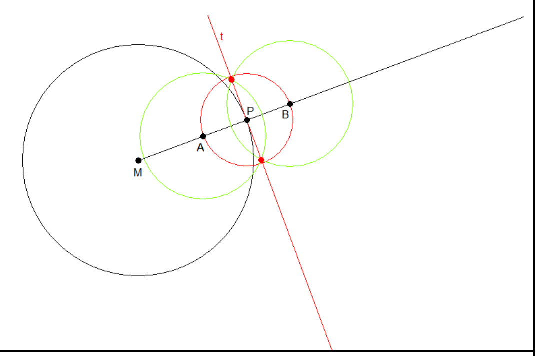
Eine Gerade kann mit einem Kreis zwei Punkte, einen einzigen Punkt oder keinen Punkt gemeinsam besitzen. Im ersten Fall heißt diese Gerade **Sekante**, im zweiten Fall **Tangente** und im dritten Fall **Passante**.

4.1 Der Punkt P liegt auf dem Kreis

<u>Vorgehensweise:</u>

1) Zeichne vom Mittelpunkt M des Kreises die Halbgerade [MP
2) Errichte in P das Lot zu [MP

→**Tangente**

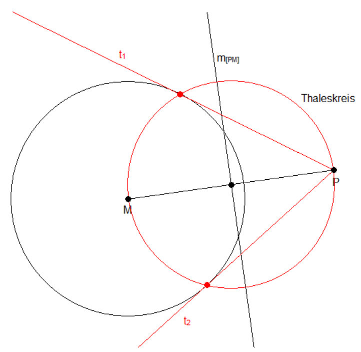


4.2 Der Punkt P liegt außerhalb des Kreises

<u>Vorgehensweise:</u>

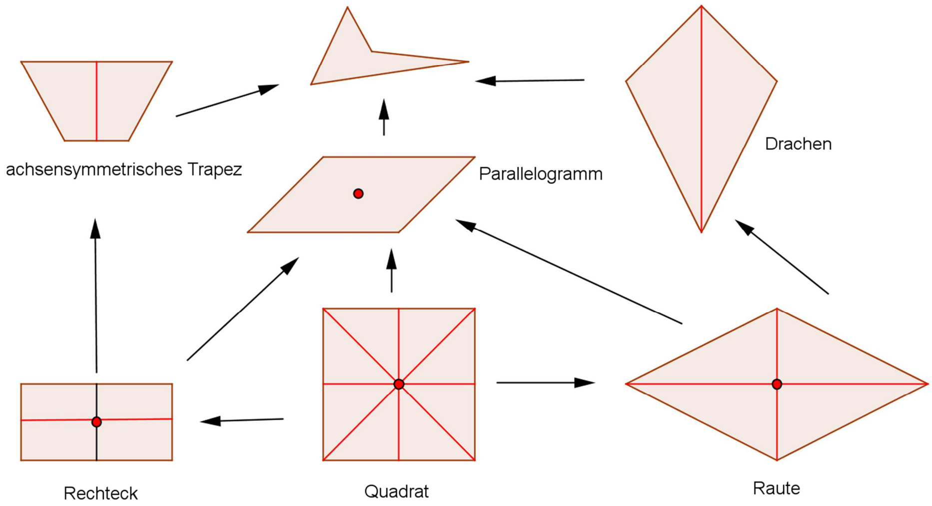
1) Zeichne vom Mittelpunkt M des Kreises die Strecke [PM]
2) Konstruiere den Mittelpunkt von [PM] und damit den **Thaleskreis** über der Strecke [PM]
3) Verbinde die Schnittpunkte der beiden Kreise

→**Tangenten**



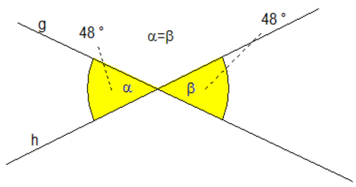
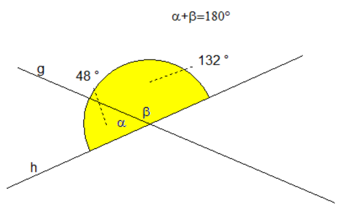
5.Achsensymmetrische und punktsymmetrische Vierecke

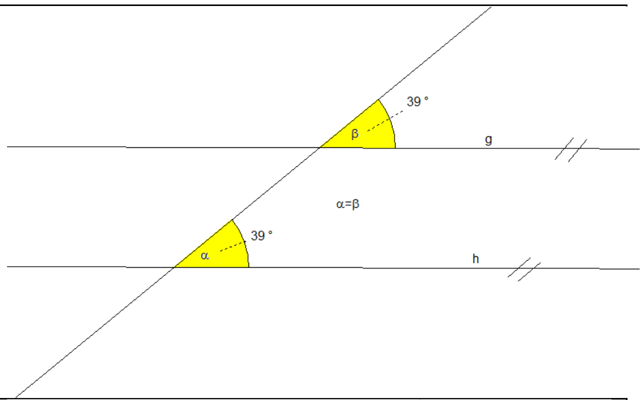
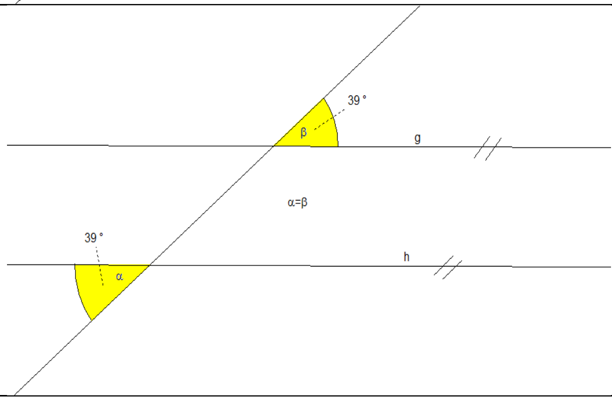
Im Folgenden sind die symmetrischen Vierecke nach der Art ihrer Symmetrie geordnet:



II. Winkelbetrachtungen

1. Winkel an Geraden

Scheitelwinkel sind gleich groß	
Nebenwinkel ergänzen sich zu 180°	

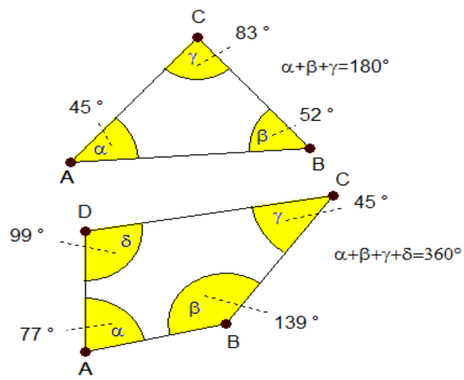
<table>
<tr>
<td>Stufenwinkel an parallelen Geraden sind gleich groß</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td>Wechselwinkel an parallelen Geraden sind gleich groß</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td>

2. Winkelsummen

In einem **Dreieck** beträgt die Summe der Innenwinkel **180°**. In einem **Viereck** beträgt die Summe der Innenwinkel **360°**.

Allgemein gilt:

In einem **Vieleck** mit **n Ecken** beträgt die Summe der Innenwinkel **(n-2)** · **180°**.

</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td>

III. Terme

1. Definition von Termen

Ein **Term** ist ein Rechenausdruck, der aus Zahlen, Rechenzeichen und Variablen besteht.

</td>
<td>

$$T(x) = 3 \cdot x - 10$$

</td>
</tr>
</table>

Die **Variablen** sind Stellvertreter für Zahlen oder für Größen und werden durch Buchstaben dargestellt. Setzt man für die Variablen Zahlen aus der **Definitionsmenge** ein, erhält man den **Termwert** für diese Zahlen. Für gleiche Variablen müssen gleiche Zahlen eingesetzt werden.	**Beispiel 1:** $T(x;y) = 3 \cdot x - 5 \cdot y - y^2 + 2$ $T(1;2) = 3 \cdot 1 - 5 \cdot 2 - 2^2 + 2 = -9$ **Beispiel2:** $T(x) = \frac{5 + 2 \cdot x}{x}$ (0 darf nicht eingesetzt werden, weil der Nenner dann 0 wäre, d.h. 0 ist nicht in der Definitionsmenge enthalten)
Zwei Terme heißen **äquivalent**, wenn ***jede*** Einsetzung von Zahlen für die Variablen jeweils **die gleichen Termwerte** ergibt. Mit Hilfe der Rechengesetze können wir Terme in äquivalente Terme umformen.	$T(x;y) = 5 + 2 \cdot (3 \cdot x + y) = 5 + 2 \cdot 3 \cdot x + 2 \cdot y = 5$
2. Rechenregeln für Potenzen	
Potenzen mit der gleichen Basis werden multipliziert, indem man die Exponenten addiert. $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$	$x^2 \cdot x^5 = x^7$
Ein Produkt wird potenziert, indem man den Exponenten auf jeden Faktor verteilt. $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$	$(-3 \cdot x)^2 = (-3)^2 \cdot x^2 = 9 \cdot x^2$
Eine Potenz wird potenziert, indem man die Exponenten multipliziert. $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$	$(x^2)^4 = x^8$
3. Auflösen vom Klammern **3.1 Klammerregeln**	
Plus vor der Klammer Klammern einfach weglassen $a + (b + c) = a + b + c$	$3 + (-x - y) = 3 - x - y$
Minus vor der Klammer alle Vorzeichen in der Klammer umdrehen und Klammern weglassen $a - (b + c) = a - b - c$	$3x - (-3 + y) = 3x + 3 - y$

<table>
<tr><td>3.2 Distributivgesetz</td><td></td></tr>
<tr><td>Ausmultiplizieren
Produkt $\longrightarrow$ Summe

$a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c$</td><td>$2 \cdot (3x+4) = 2 \cdot 3x + 2 \cdot 4 = 6x + 8$</td></tr>
<tr><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Ausklammern (Faktorisieren)
Summe $\longrightarrow$ Produkt

$a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b+c)$</td><td>$9 + 6x = 3 \cdot (3 + 2x)$</td></tr>
<tr><td><h2>4. Multiplizieren von Summen</h2>Jedes Glied der ersten Klammer wird mit jedem Glied der zweiten Klammer multipliziert und diese Produkte werden addiert.

$(a+b) \cdot (c+d) = a \cdot c + a \cdot d + b \cdot c + b \cdot d$</td><td>$(4x+2y) \cdot (x-3y)$
$= 4x \cdot x - 4x \cdot 3y + 2y \cdot x - 2y \cdot 3y$
$= 4x^2 - 10xy - 6y^2$</td></tr>
<tr><td>Hilfreich sind auch die binomischen Formeln (nicht im Lehrplan der 7. Klasse!):</td><td></td></tr>
<tr><td>1. Binomische Formel

$(a+b)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2$</td><td>$(3x+5y)^2$
$= (3x)^2 + 2 \cdot 3x \cdot 5y + (5y)^2$
$= 9x^2 + 30xy + 25y^2$</td></tr>
<tr><td>2. Binomische Formel

$(a-b)^2 = a^2 - 2 \cdot a \cdot b + b^2$</td><td>$(3x-5y)^2$
$= (3x)^2 - 2 \cdot 3x \cdot 5y + (5y)^2$
$= 9x^2 - 30xy + 25y^2$</td></tr>
<tr><td>3. Binomische Formel

$(a+b) \cdot (a-b) = a^2 - b^2$</td><td>$(3x+5y) \cdot (3x-5y))$
$= (3x)^2 - (5y)^2$
$= 9x^2 - 25y^2$</td></tr>
<tr><td><h1>IV Gleichungen</h1><h2>1. Definition einer Gleichung</h2>Eine Gleichung besteht aus zwei Termen, die durch ein Gleichheitszeichen verbunden sind.
Die Grundmenge G gibt an, welche Zahlen anstelle der Variablen eingesetzt werden dürfen.
Die Lösungsmenge L enthält alle Zahlen, die beim Einsetzen eine wahre Aussage ergeben.</td><td>Für $3x - 2 \cdot (5 + 5x) = 4$ an der Grundmenge G=Q ist

L={-2}

denn $3 \cdot (-2) - 2 \cdot (5 + 5 \cdot (-2)) = 4$ ist wahr und alle anderen rationalen Zahlen ergeben eine falsche Aussage</td></tr>
</table>

2. Lösen von Gleichungen Mit Hilfe von **Äquivalenzumformungen** kann eine Gleichung nach der Variablen aufgelöst werden. Die Lösungsmenge ändert sich dabei nicht.	
4 Schritte:	
Termumformung Beide Seiten vereinfachen. Ausmultiplizieren. Gleichartige Terme zusammenfassen	$9x-(2x-5)=3\cdot(x+1)+x-13$ $9x-2x+5=3x+3+x-13$ $7x+5=4x-10$
Trennen x-Terme auf die eine Seite, Terme ohne x auf die andere Seite bringen. Addieren oder Subtrahieren des gleichen Terms oder der gleichen Zahl auf beiden Seiten	$7x+5=4x-10$ / **-4x** $3x+5=-10$ /**-5** $3x=-15$
x isolieren Koeffizient „wegbringen“. Multiplizieren oder Dividieren mit der gleichen Zahl ($\neq 0$) auf beiden Seiten	$3x=-15$ /**:3** $x=-5$
Lösung Lösungsmenge angeben, falls verlangt (evtl. Grundmenge beachten)	$x=-5$ **L={-5}**

V. Kongruenz

Deckungsgleiche Figuren F und G nennt man **zueinander kongruent**: $F \cong G$

1. Kongruenzsätze für Dreiecke

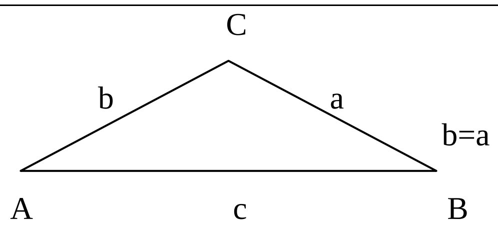
Zwei Dreiecke sind bereits **kongruent**, wenn sie

- in drei Seiten übereinstimmen (**SSS-Satz**).
- in einer Seite und zwei gleichliegenden (bzw. anliegenden) Winkeln übereinstimmen (**WSW-Satz**)
- in zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel übereinstimmen (**SWS-Satz**)
- in zwei Seiten und dem Gegenwinkel der längeren Seite übereinstimmen (**SsW-Satz**)

2. Besondere Dreiecke

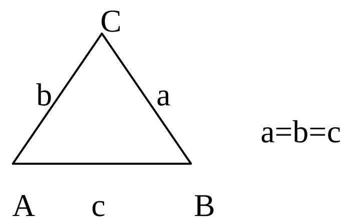
Ein Dreieck mit zwei gleich langen Seiten heißt **gleichschenkliges Dreieck**.

- Achsensymmetrisch
- Basiswinkel sind gleich groß



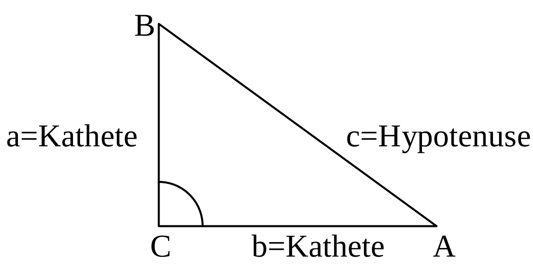
Ein Dreieck mit drei gleich langen Seiten heißt **gleichseitiges Dreieck**.

- drei Symmetrieachsen
- drei 60°-Winkel



Ein Dreieck mit einem rechten Winkel heißt **rechtwinkliges Dreieck**.

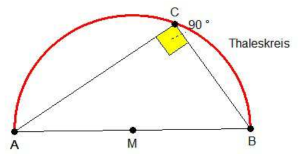
- die Seite gegenüber des rechten Winkels heißt **Hypotenuse;** sie ist stets die längste Seite des Dreiecks
- die anderen beiden Seiten heißen **Kathete**



3. Satz des Thales

Satz des Thales:

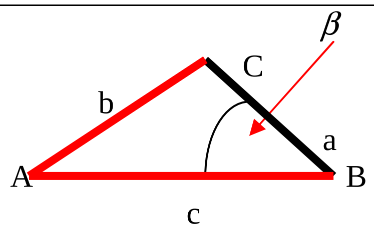
Ein Dreieck ABC hat genau dann bei C einen rechten Winkel, wenn die Ecke C auf einem Kreis mit dem Durchmesser [AB] liegt.



4. Dreieckskonstruktionen

Planfigur zeichnen

Zeichne ein beliebiges Dreieck und markiere darin die gegebenen Stücke farbig.



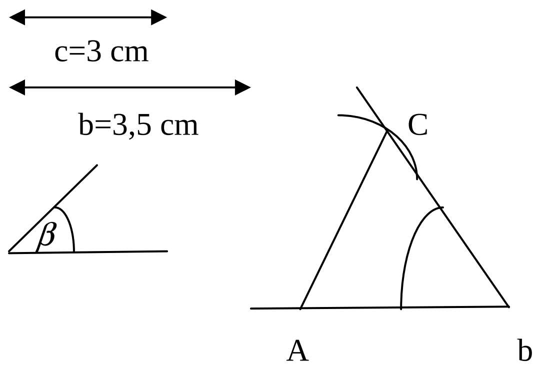
Konstruktionsplan

Schreibe auf, wie du nacheinander die Eckpunkte der gesuchten Figur erhältst.

(1) A und B sind durch $\overline{AB}$=c gegeben.
(2) C liegt 1. auf dem Kreis k(A;r=b) und
2. auf dem freien Schenkel des Winkels β, angetragen in B an AB!

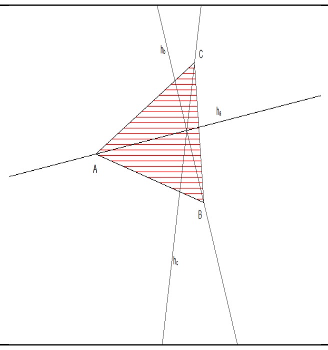
Konstruktion

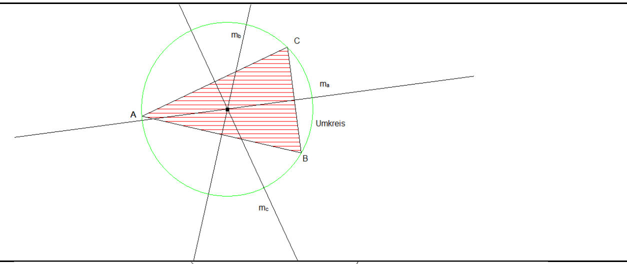
Konstruiere das Dreieck wie im Plan beschrieben nur mit Zirkel und Lineal.



5. Besondere Linien im Dreieck

Die **Höhen** schneiden sich in einem **Punkt**.



Die **Mittelsenkrechten** schneiden sich im **Umkreismittelpunkt**.	
Die **Winkelhalbierenden** schneiden sich im **Inkreismittelpunkt**.