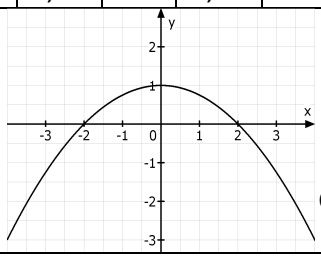
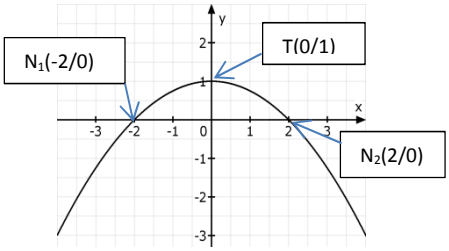
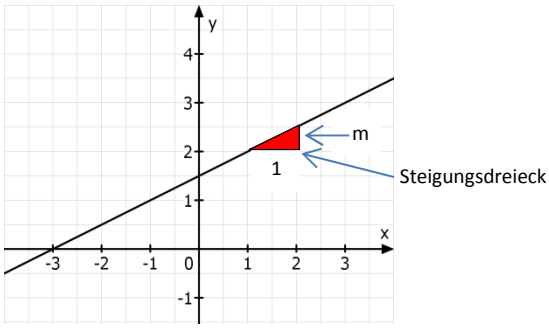
Grundwissen Mathematik Jahrgangsstufe 8

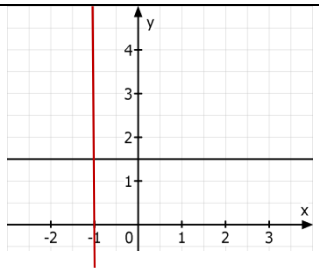
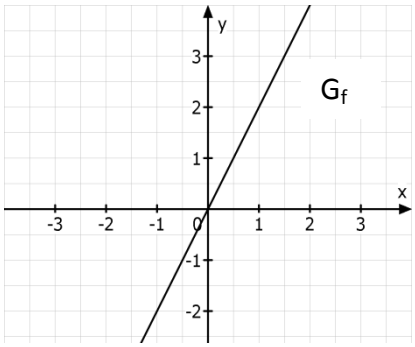
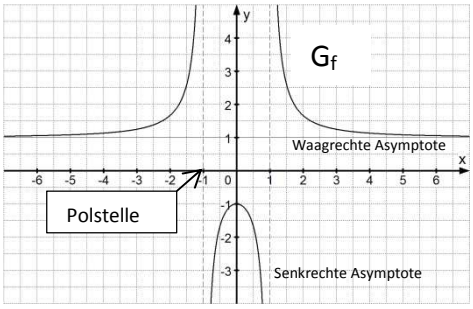
Themenbereich	Beispiele
Allgemeiner Funktionsbegriff: Eine Zuordnung, bei der jedem Element x (Argument) aus der Menge D_f aller zulässigen Werte für x (Definitionsmenge von f) **eindeutig** ein Element y zugeordnet wird, heißt Funktion: $\underbrace{f:\ x \mapsto y}_{\text{Funktionsvorschrift}} \quad ; x \in D_f$ y heißt dabei Funktionswert. Die Menge aller möglichen Funktionswerte heißt Wertemenge W_f. f(x) heißt Funktionsterm, die Gleichung y=f(x) heißt Funktionsgleichung.	Funktionsvorschrift $f: x \mapsto -0,25x^2 + 1 \ ; x \in \mathbb{Q}$ $-0,25x^2 + 1$ (Funktionsterm) $y = -0,25x^2 + 1$ (Funktionsgleichung)
• **Wertetabelle** In der Wertetabelle werden x-Werte und zugehörige Funktionswerte dargestellt.	
• **Graph von f** Jedem Paar Wertepaar (x/y) kann ein Punkt P(x/y) im kartesischen Koordinatensystem zugeordnet werden. Die Menge aller dieser Punkte P(x/y) mit $x \in D_f$ heißt Graph von f (G_f) Die x-Koordinate wird auch als Abszisse, die y-Koordinate als Ordinate bezeichnet.	
• **Schnittpunkte mit den Achsen** Der Graph von f schneidet die y-Achse im Punkt T(0/f(0)). Ein <u>x-Wert</u> x_0, für den der zugehörige Funktionswert 0 ist, heißt **Nullstelle** von f. Es gilt also $f(x_0)=0$. Der Graph von f schneidet oder berührt im Punkt $N(x_0/0)$ die x-Achse	Achtung: Nullstellen sind $x_1=-2$ und $x_2=2$
Lineare Funktion Funktionsgleichung $g:\ y = m \cdot x + t$ m heißt **Steigung** der linearen Funktion. Der Schnittpunkt mit der y-Achse ist T(0/t). t heißt **y-Achsenabschnitt** Der Graph einer linearen Funktion ist eine Gerade. Bestimmung der Steigung mit Hilfe zweier Punkte $P(x_1/y_1)$ und $Q(x_2/y_2)$ auf G_g: $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$	y= 0,5x+1,5 → t=1,5 P(-2/0,5) und Q(1/2) $m = \frac{2-0,5}{1-(-2)} = \frac{1,5}{3} = 0,5$ oder $m = \frac{0,5-2}{-2-1}$

x	-2	-1	0	1	2
y	0	0,75	1	0,75	0





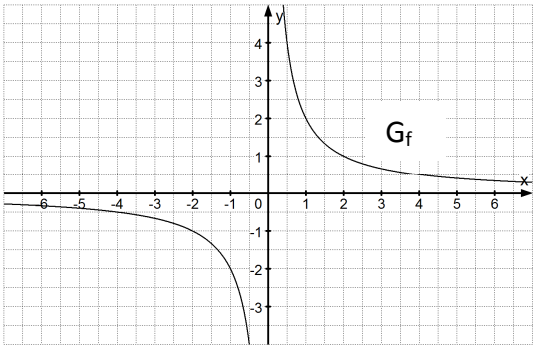


Sonderfall: **Parallele zur x-Achse**: Geradengleichung g: y = t , d.h. m = 0 <u>Keine Funktion!</u>: **Parallele zur y-Achse**: Kann über die Gleichung $x = x_0$ beschrieben werden.	g: y = 1,5 Senkrechte x = -1 
Spezialfall (t=0): **Die direkte Proportionalität** Zwei einander zugeordnete Größen x und y sind (direkt) proportional, wenn: • zum 2-, 3-,..., k-fachen der einen Größe das 2-, 3-,..., k-fache der anderen Größe gehört. • der Quotient $\frac{y}{x} = m$ konst ant ist „Quotientengleichheit“ m ist die Steigung und heißt hier Proportionalitätsfaktor/-konstante. • die Funktionsgleichung f: $y = m \cdot x$ gilt • der Graph G_f eine Ursprungsgerade ist. Kurz: $y \sim x$ („ist direkt proportional zu“)	y=2x 
Gebrochen rationale Funktion - Bruchterme Terme, bei denen eine Variable im Nenner auftritt, heißen Bruchterme. Funktionen, deren Funktionsterm ein **Bruchterm** ist, heißen **gebrochen rationale Funktionen**. Alle Zahlen, für die der Nenner Null wird, gehören nicht zur Definitionsmenge der Funktion. Diese Zahlen werden **Definitionslücken** genannt. Einfaches Beispiel: $f: x \mapsto \frac{1}{x-2}$ hat die Definitionslücke x = 2. Den Graphen einer gebrochen rationalen Funktion bezeichnet man als **Hyperbel**. Der Graph hat an einer Definitionslücke in der Regel eine sogenannte **Polstelle.** Geraden, an die sich der Graph von f „beliebig genau annähert“, heißen **Asymptoten**.	$\frac{3}{x}$; $\frac{2}{x-1}$; $\frac{2x+3}{x^2-4}$; $\frac{a}{a+1}$ $f: x \mapsto \frac{2}{x^2-1}+1$; $D_f = Q \setminus \{-1; 1\}$ Definitionslücken: x_1= -1 und x_2= 1  senkrechte Asymptoten: x = -1 und x = 1 waagrechte Asymptote: y = 1 Berechnung: Setze für x eine betragsmäßig große Zahl ein z.B. f(100)≈1,0002 und f(-100)≈1,002 → x = 1 als waagr. Asymptote. Bzw. für $x \to \pm\infty$ läuft $\frac{2}{x^2-1}$ gegen 0 also x = 1 als waagr. Asymptote

Spezialfall: **Indirekte Proportionalität**
Zwei einander zugeordnete Größen x und y sind indirekt (umgekehrt) proportional, wenn:

- zum n-fachen Wert der einen Größe der $\frac{1}{n}$-fache Wert der anderen Größe gehört.
- Das Produkt $x \cdot y = p$ für alle Wertepaare gleich ist. „Produktgleichheit“
- f: $y = \frac{p}{x}$ als Funktionsgleichung gilt
- Der Graph der Zuordnung eine Hyperbel ist

$y = \frac{2}{x}$, d.h $x \cdot y = 2$



Alltagsbeispiel:
3 Wasserrohre füllen ein Schwimmbad in 2,5 h. Wie lange dauert es mit 5Wasserrohren?
Die Zuordnung Anzahl (x) $\longmapsto$ Stunden (y) ist indirekt proportional.
Dreisatz:

$$\begin{array}{ccc} & 3 \mapsto 2{,}5h & \\ :3 & & \cdot 3 \\ & 1 \mapsto 7{,}5h & \\ \cdot 5 & & :5 \\ & 5 \mapsto 1{,}5h & \end{array}$$

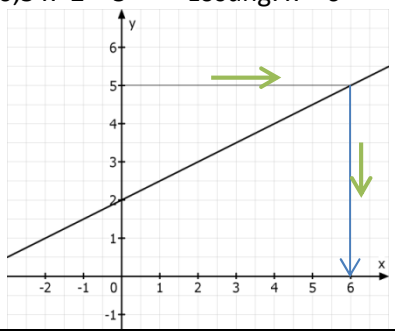
oder
$p = 3 \cdot 2{,}5h = 7{,}5h$

$y = \frac{p}{x} = \frac{7{,}5h}{5} = 1{,}5h$

Antwort: Mit 5 Rohren dauert es…

Lineare Funktion und lineare Gleichung:
Eine lineare Gleichung hat die Form ax + b = c
Diese lässt sich durch Äquivalenzumformungen lösen: $x = \frac{c-b}{a}$ (a, b, c fest gewählt, a ≠ 0)
oder mit Hilfe der Geraden y = a·x + b im KOSY.
Am Graphen lesen wir dann ab, für welchen x-Wert wir den Wert c erhalten.

0,5·x+2 = 5 Lösung: x = 6



Lineare Ungleichungen:
Werden zwei Terme durch die Zeichen <; ≤; >; ≥ verbunden, so entsteht eine Ungleichung.
Kommen in der Ungleichung nur lineare Terme vor, so sprechen wir von linearen Ungleichungen.
Gelöst werden Ungleichungen mit den selben Äquivalenzumformungen wie bei linearen Gleichungen, jedoch mit einer Ausnahme:
! Bei Multiplikation oder Division mit einer negativen Zahl kehrt sich das Ungleichheitszeichen um!

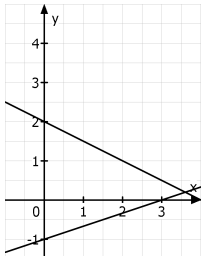
2x - 3≤ 4; 5x > 8

$2 \cdot (x-3) < 6x + 6$ ausklammern

$2x - 6 < 6x + 6 \quad | -6x + 6$ sortieren

$-4x < 12 \quad |:(-4)$

$x > -3$

Lösungen von linearen Ungleichungen sind Zahlenmengen und werden mit Intervall- oder Mengenschreibweise angegeben!	$L =]-3;+\infty[= \{x \in Q \mid x > -3\}$
Lineare Gleichungssysteme Sollen zwei oder mehr lineare Gleichungen gleichzeitig erfüllt sein, so sprechen wir von einem linearen Gleichungssystem. Eine Lösung ist in der Regel ein Zahlenpaar (x/y), das beide Gleichungen löst. Jede Gleichung beschreibt eine Gerade, deren Funktionsgleichung sich aus der linearen Gleichung ergibt. Ein lineares Gleichungssystem kann mit dem **Gleichsetzverfahren**, dem **Einsetzverfahren** bzw. dem **Additionsverfahren** gelöst werden. Alle diese Verfahren haben zum Ziel, das Gleichungssystem auf eine Gleichung mit einer Variablen zurückzuführen. Dabei können folgende **Sonderfälle** auftreten: Die beiden Geraden sind identisch→allgemeingültiges Gleichungssystem . Alle Punkte, die auf dieser Geraden liegen sind Lösungen. L={(x/y)|y=ax +b} Die beiden Geraden liegen parallel→unlösbares Gleichungssystem L={ }	Lineares Gleichungssystem mit zwei Variablen und zwei Gleichungen: I) $x - 3y = 3$ → $y = \frac{1}{3}x - 1$ Gerade G_g II) $2x + 4y = 8$ → $y = -\frac{1}{2}x + 2$ Gerade G_h  Lösung mit Einsetzverfahren: I) $x - 3y = 3 \Rightarrow \boxed{x = 3 + 3y}$ II) $2x + 4y = 8$ II') $2(3 + 3y) + 4y = 8$ $6 + 10y = 8$ $y = 0,2 \Rightarrow x = 3,6$ L={(3,6/0,2)}
Rechnen mit Bruchtermen Kürzen, d.h. Zähler und Nenner faktorisieren und anschließend gleiche Terme kürzen. Addieren und Subtrahieren: • Bruchterme „gleichnamig“ machen d.h. möglichst den Hauptnenner bilden • Zähler addieren/subtrahieren Multiplizieren: • Zähler mal Zähler, Nenner mal Nenner Dividieren: • Multiplizieren mit dem Kehrbruch	$\frac{2x - 8x^2}{4x^3 - 2x} = \frac{2x(1-4x)}{2x(2x^2-1)} = \frac{1-4x}{2x^2-1}$ $\frac{2}{x-1} - \frac{3}{x+1} = \frac{2(x+1)}{(x-1)(x+1)} - \frac{3(x-1)}{(x-1)(x+1)} =$ $\frac{2x + 2 - (3x-3)}{(x-1)(x+1)} = \frac{-x+5}{x^2-1}$ $\frac{2-x}{x^2+1} \cdot \frac{3x}{1-x} = \frac{(2-x)\cdot 3x}{(x^2+1)(1-x)}$
Bruchgleichungen Gleichungen, bei denen die Variable im Nenner vorkommt, heißen Bruchgleichungen. Vorgehensweise beim Lösen: • Definitionsmenge D bestimmen • Den Hauptnenner der Bruchterme bilden und dann beide Seiten mit dem Hauptnenner multiplizieren. • Bruchtermfreie Gleichung lösen • Kontrolle, ob Lösung zur Definitionsmenge gehört! • Lösungsmenge angeben	$\frac{1}{x-2} - \frac{1}{3} = \frac{2}{x+1}$ $D = Q \setminus \{-1;2\}$ $\frac{3(x+1) - (x-2)(x+1)}{3(x-2)(x+1)} = \frac{2\cdot 3(x-2)}{3(x-2)(x+1)}$ $3(x+1) - (x-2)(x+1) = 3(x-2)$ …

Potenzen mit ganzzahligen Exponenten

$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n-\text{Faktoren}}$ für jede natürliche Zahl n

$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ für a ≠ 0 und n∈ N

$a^0 = 1$ für a ≠ 0

Rechengesetze für Potenzen:

$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ $\quad a^m : a^n = \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$

$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$ $\quad a^n : b^n = \frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$

$(-3)^4 = (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) = 81$

$3^{-4} = \frac{1}{3^4} = \frac{1}{81}$

$3,7 \cdot 10^{-4} = 3,7 \cdot \frac{1}{10^4} = 3,7 \cdot \frac{1}{10000} =$

$3,7 \cdot 0,0001 = 0,00037$

Kreis:

Bei jedem Kreis ist der Quotient aus Umfang und Durchmesser konstant!

$\frac{U}{d} = \pi \ (\text{konst.})$. Die Zahl π nennen wir Kreiszahl.

π = 3,141592654..... (irrationale Zahl)

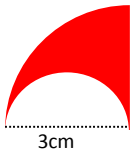
Umfang eines Kreises mit Radius r:

$U = 2r \cdot \pi$

Flächeninhalt eines Kreises mit Radius r:

$A = r^2 \cdot \pi$

Berechne den Flächeninhalt und den Umfang der folgenden Figur



$A = \frac{1}{4} \cdot (3\text{cm})^2 \cdot \pi - \frac{1}{2} \cdot (1,5\text{cm})^2 \cdot \pi$

$U = 3\text{cm} + \frac{1}{4} \cdot 2 \cdot 3\text{cm} \cdot \pi + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 1,5\text{cm} \cdot \pi$

1. Strahlensatz:

Werden die zwei Geraden einer Geradenkreuzung mit dem Schnittpunkt Z von zwei **parallelen** Geraden geschnitten, dann **verhalten sich** zwei beliebige **Abschnitte auf der einen Kreuzungsgeraden** genauso **wie die entsprechenden Abschnitte** auf der **anderen Kreuzungsgeraden.**

hier: AB||A'B' ⇒ ZA' : ZA = ZB' : ZB

und AA' : ZA = BB' :ZB usw.

• **2. Strahlensatz:**

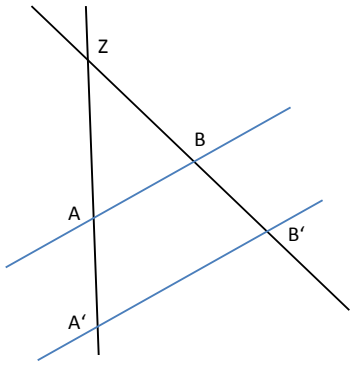
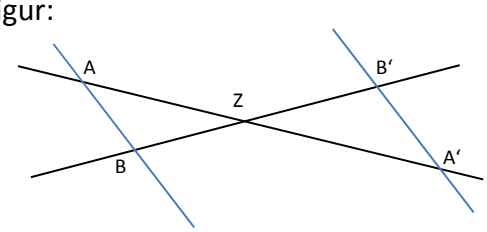
Die ausgeschnittenen **Parallelstrecken verhalten sich** dann genauso **wie die Entfernungen entsprechender Streckenendpunkte zum Kreuzungspunkt Z.**

hier z.B.: AB|| A'B' ⇒ A'B' : AB = ZB' : ZB

Umkehrung des 1. Strahlensatzes:

Verhalten sich zwei Abschnitte auf der einen Kreuzungsgeraden genauso wie die entsprechenden Abschnitte auf der anderen Kreuzungsgeraden, dann sind die zwei sich **schneidenden Geraden parallel**.

V-Figur:



X-Figur: