Grundwissen Mathematik Jahrgangsstufe 9

	Beispiele
Es gilt: $IN \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset IR$, wobei IN : Menge der natürlichen Zahlen; $\mathbb{Z}$: Menge der ganzen Zahlen $\mathbb{Q}$: Menge der rationalen Zahlen IR : Menge der reellen Zahlen	$2 \in IN$, aber $-5 \notin IN$ $-5 \in \mathbb{Z}$, aber $3{,}7 \notin \mathbb{Z}$ $3{,}7 \in \mathbb{Q}$, aber $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ $\sqrt{2} \in IR$
Quadratwurzel: Für $a \geq 0$ ist $\sqrt{a}$ diejenige nichtnegative Zahl, die quadriert a ergibt. $\sqrt{a}$ heißt die **(Quadrat-)Wurzel** aus a. Also: $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$	$\sqrt{4} = 2$ $\sqrt{1\,000\,000} = 1000$ $\sqrt{0{,}09} = 0{,}3$ $\sqrt{-25}$: nicht definiert
Rechenregeln: 1) $\sqrt{a^2} = \lvert a \rvert$ 2) $\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ für $a \geq 0,\ b \geq 0$ 3) $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ für $a \geq 0,\ b > 0$	1) $\sqrt{6^2} = \sqrt{36} = 6$, aber $\sqrt{(-7)^2} = \sqrt{49} = 7$ 2) $\sqrt{81 \cdot 16} = \sqrt{81} \cdot \sqrt{16} = 9 \cdot 4 = 36$ 3) $\sqrt{\frac{169}{144}} = \frac{\sqrt{169}}{\sqrt{144}} = \frac{13}{12}$ **Vorsicht:** $\sqrt{3^2 + 4^2} \neq 3 + 4$!
Binomische Formeln: $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$	$(x+7)^2 = x^2 + 14x + 49$ $(3x-5y)^2 = 9x^2 - 30xy + 25y^2$ $(3a-4c)(3a+4c) = 9a^2 - 16c^2$ $2x^2 - 392 = 2(x^2 - 196) = 2 \cdot (x+14)(x-14)$
Partielles Radizieren **Rationalmachen des Nenners**	$\sqrt{12} = \sqrt{4 \cdot 3} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{3} = 2\sqrt{3}$ $\sqrt{72a^4b^2c^{16}} = 6\sqrt{2} \cdot a^2 \cdot \lvert b \rvert \cdot c^8$ $\frac{5}{\sqrt{3}} = \frac{5 \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \frac{5\sqrt{3}}{3}$ $\frac{7}{2-\sqrt{3}} = \frac{7 \cdot \left(2+\sqrt{3}\right)}{\left(2-\sqrt{3}\right) \cdot \left(2+\sqrt{3}\right)} = \frac{14+7\sqrt{3}}{1} = 14 + 7\sqrt{3}$
n-te Wurzeln: Für $a \geq 0$ ist $\sqrt[n]{a}$ diejenige nichtnegative Zahl, deren n-te Potenz a ergibt. $\sqrt[n]{a}$ heißt die **n-te Wurzel** aus a. Also: $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$	$\sqrt[3]{8} = 2$ $\sqrt[4]{81} = 3$ $\sqrt[5]{0{,}00001} = 0{,}1$
Rationale Exponenten: Für $a > 0$, $p, q \in IN$ definiert man: $a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$ und $a^{-\frac{p}{q}} = \frac{1}{\sqrt[q]{a^p}}$, insbesondere also $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$.	$8^{\frac{5}{3}} = \left(\sqrt[3]{8}\right)^5 = 2^5 = 32$ $81^{-\frac{3}{4}} = \frac{1}{\left(\sqrt[4]{81}\right)^3} = \frac{1}{3^3} = \frac{1}{27}$
Potenzgesetze: Für $a > 0,\ b > 0$ gilt: $a^r \cdot a^s = a^{r+s}$ $a^r : a^s = a^{r-s}$ $\left(a^r\right)^s = a^{rs}$ $a^r \cdot b^r = (ab)^r$ $a^r : b^r = (a:b)^r$	$x \cdot \sqrt[3]{x^2} = x^1 \cdot x^{\frac{2}{3}} = x^{\frac{5}{3}}$ $\sqrt{y : \sqrt[5]{y}} = \left(y^1 : y^{\frac{1}{5}}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(y^{\frac{4}{5}}\right)^{\frac{1}{2}} = y^{\frac{2}{5}}$

Lösen quadratischer Gleichungen:

$$ax^2+bx+c=0 \quad (a \neq 0)$$

„Mitternachtsformel“:

$$x_{1/2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Dabei heißt $D=b^2-4ac$ die **Diskriminate:**

$D>0$: Zwei Lösungen
$D=0$: Eine Lösung
$D<0$: Keine Lösung

$$3x^2-5x+2=0$$
$$\Rightarrow a=3;\ b=-5;\ c=2$$

$$x_{1/2}=\frac{5\pm\sqrt{25-24}}{6}=\frac{5\pm 1}{6}$$

$$\Rightarrow x_1=1 \qquad x_2=\frac{2}{3}$$

Sonderfälle:

1) $b=0$: Auflösen nach x^2
2) $c=0$: Ausklammern von x
3) Linke Seite ist binomische Formel

Zu 1) $x^2-10=0 \Rightarrow x^2=10 \Rightarrow x_{1/2}=\pm\sqrt{10}$
Zu 2) $2x^2-5=0 \Rightarrow x\cdot(2x-5)=0 \Rightarrow x_1=0;\ x_2=2{,}5$
Zu 3) $x^2-6x+9=0 \Rightarrow (x-3)^2=0 \Rightarrow x-3=0 \Rightarrow x=3$

Quadratische Funktionen:

Normalform: $f(x)=ax^2+bx+c$
Scheitelform : $f(x)=a(x-x_S)^2+y_S$
Nullstellenform: $f(x)=a\cdot(x-x_1)\cdot(x-x_2)$

mit Scheitel $S(x_S/y_S)$ und
Nullstellen x_1 und x_2 (falls vorhanden)

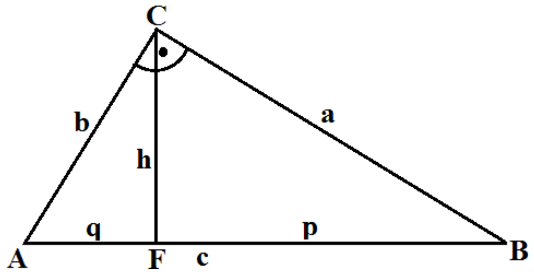
Der Graph einer quadratischen Funktion ist eine **Parabel**.
$a=1$: (verschobene) Normalparabel
$a<0$: Parabel nach unten geöffnet
$a>0$: Parabel nach oben geöffnet
$|a|>1$: Parabel „enger“ als Normalparabel
$|a|<1$: Parabel „weiter“ als Normalparabel

Geg.: $f(x)=-\frac{1}{4}x^2+1{,}5x-\frac{5}{4}$
Ges.: Scheitel(form), Nullstellenform

$$f(x)=-\frac{1}{4}x^2+1{,}5x-\frac{5}{4}$$
$$=-\frac{1}{4}\cdot\left[x^2-6x+5\right] \qquad \text{(Ausklammern von a)}$$
$$=-\frac{1}{4}\cdot\left[x^2-6x+9-9+5\right] \qquad \text{(quadratisch ergänzen)}$$
$$=-\frac{1}{4}\cdot\left[(x-3)^2-4\right]$$
$$=-\frac{1}{4}\cdot(x-3)^2+1 \qquad \text{(Scheitelform)}$$
$$\Rightarrow S(3/1)$$

Nullstellen: $x_1=1;\ x_2=5$ (Mitternachtsformel!)
Kontrolle: $\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{1+5}{2}=3=x_S$ (stimmt!)
Nullstellenform: $f(x)=-\frac{1}{4}\cdot(x-1)\cdot(x-5)$
Parabel ist nach unten geöffnet und „weiter“ als Normalparabel

Satzgruppe des Pythagoras:



c: Hypotenuse a,b: Katheten
p,q: Hypotenusenabschnitte

Es gilt:

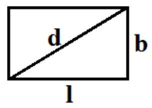
1) $a^2 + b^2 = c^2$ (Hypotenusensatz)
2) $h^2 = pq$ (Höhensatz)
3) $a^2 = cp$ und $b^2 = cq$ (Kathetensatz)
4) $ab = ch$

Umkehrung:
Gilt im Dreieck ABC die Formel $a^2 + b^2 = c^2$, so ist das Dreieck rechtwinklig mit Hypotenuse c.

Abstand zweier Punkte im Koordinatensystem:
Geg.: Punkte $A(x_1 / y_1)$; $B(x_2 / y_2)$

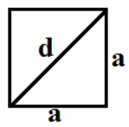
$$\overline{AB} = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

1) Diagonale im Rechteck



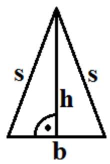
$$d = \sqrt{l^2 + b^2}$$

2) Diagonale im Quadrat



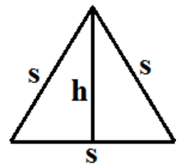
$$d = \sqrt{2} \cdot a$$

3) Höhe im gleichschenkligen Dreieck



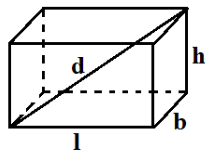
$$h = \sqrt{s^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2}$$

4) Höhe im gleichseitigen Dreieck



$$h = \sqrt{s^2 - \left(\frac{s}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{4}s^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}s$$

5) Raumdiagonale im Quader



$$d = \sqrt{l^2 + b^2 + h^2}$$

6) Raumdiagonale im Würfel (Kantenlänge a)

$$d = \sqrt{3} \cdot a$$

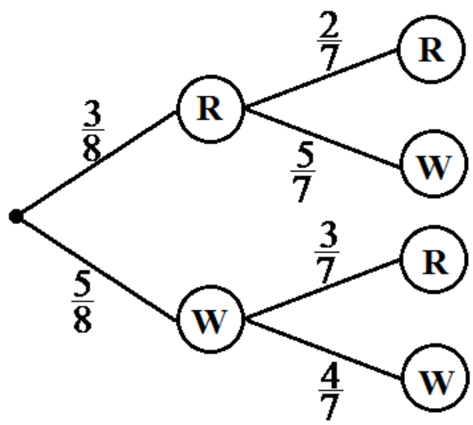
Zusammengesetzte Zufallsexperimente:

Zeichnen von Baumadigrammen

1. Pfadregel:
Die Wahrscheinlichkeit eines Elementarereignisses ist gleich dem Produkt der Wahrscheinlichkeiten längs des zugehörigen Pfades.

2. Pfadregel:
Die Wahrscheinlichkeit eines beliebigen Ereignisses ist gleich der Summe des Wahrscheinlichkeiten aller Pfade, die zu diesem Ereignis gehören.

In einer Urne liegen 3 rote und 5 weiße Kugeln, Es wird daraus zwei Mal ohne Zurücklegen gezogen.

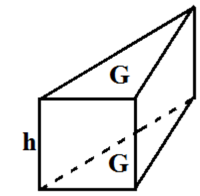


P(„beide Kugeln sind rot“) $= P(\{rr\}) = \frac{3}{8} \cdot \frac{2}{7} = \frac{3}{28}$

P(„genau eine K. rot“) $= P(\{wr; rw\}) = \frac{5}{8} \cdot \frac{3}{7} + \frac{3}{8} \cdot \frac{5}{7} = \frac{15}{28}$

P(„mindestens eine Kugel weiß“)
=1 – P(„keine K. ist weiß“) $= 1 - P(\{rr\}) = 1 - \frac{3}{8} \cdot \frac{2}{7} = \frac{25}{28}$

Prisma und Zylinder:



Volumen:

$V_P = G \cdot h$ $\qquad$ $V_Z = G \cdot h = r^2\pi \cdot h$

Mantelfläche: (U: Umfang der Grundfläche)

$M_P = U \cdot h$ $\qquad$ $M_Z = U \cdot h = 2r\pi \cdot h$

Oberfläche: $S = 2G + M$

Berechne Volumen und Oberfläche

a) eines Prismas ($h = 7cm$), dessen Grundfläche ein rechtwinkliges Dreieck mit Katheten $a = 3cm; b = 4cm$ ist.

b) eines Zylinders mir Durchmesser 14cm und Höhe 2cm

Zu a: $G = \frac{1}{2}ab = 6cm^2 \Rightarrow V = Gh = 42cm^3$

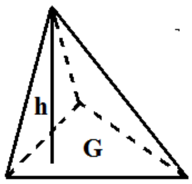
$U = a + b + c = a + b + \sqrt{a^2 + b^2} = 12cm$

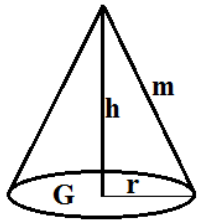
$S = 2G + M = 2G + Uh = 12cm^2 + 84cm^2 = 96cm^2$

Zu b: $V = r^2\pi \cdot h = (7cm)^2 \cdot \pi \cdot 2cm = 98\pi cm^3 \approx 308cm^3$

$S = 2G + M = 2r^2\pi + 2r\pi \cdot h = 126\pi cm^2 \approx 396cm^2$

Pyramide und Kegel:





Volumen:

$V_{Py} = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h$ $\qquad$ $V_K = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h = \frac{1}{3} \cdot r^2\pi \cdot h$

Mantelfläche:

$M_K = rm\pi$, wobei

$m = \sqrt{r^2 + h^2}$

Oberfläche: $S = G + M$

Berechne Volumen und Oberfläche eines Kegels mit Radius 5cm und Höhe 12cm.

$G = r^2\pi = 25\pi cm^2$

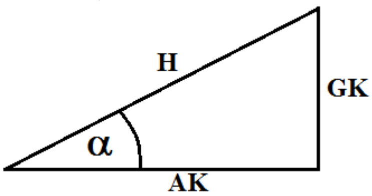
$V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h = 75\pi cm^3 \approx 236cm^3$

$m = \sqrt{r^2 + h^2} = 13cm$ (**Mantellinie**)

$M = rm\pi = 5cm \cdot 13cm \cdot \pi = 65\pi cm^2$

$S = G + M = 90\pi cm^2 \approx 283cm^2$

Trigonometrie:



AK: Ankathete
GK: Gegenkathete
H: Hypotenuse

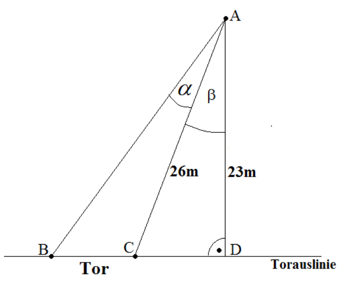
$\sin\alpha = \frac{GK}{H}$ $\qquad$ $\cos\alpha = \frac{AK}{H}$ $\qquad$ $\tan\alpha = \frac{GK}{AK}$

$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ $\qquad$ $(\sin\alpha)^2 + (\cos\alpha)^2 = 1$

Wichtige Werte für Sinus und Kosinus:

α	0°	30°	45°	60°	90°
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1
$\cos\alpha$	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Bei einem Fußballspiel bekommt eine Mannschaft einen Freistoß zugesprochen (siehe Skizze). Bestimme den Schusswinkel α, unter dem der Schütze das Tor treffen kann. (Torbreite: 7,32m)



Lösung:

$\cos\beta = \frac{23m}{26m} \Rightarrow \beta = 27,79577...°$

$\overline{CD} = \sqrt{26^2 - 23^2}\, m = 12,124355...m$

$\tan(\alpha + \beta) = \frac{12,124355...m + 7,32m}{23m}$

$\Rightarrow \alpha + \beta = 40,211...°$

$\Rightarrow \alpha = 12,41...° \approx 12,4°$