Grundwissen Mathematik - 10. Jahrgangsstufe – VHG Bogen

Grundwissen:

M 10.1 Kreis und Kugel

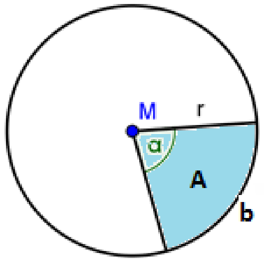
Kreissektor:

Flächeninhalt des Kreissektors mit Mittelpunktswinkel α und Radius r:

A = $\frac{\alpha}{360°} \cdot r^2\pi = \frac{1}{2} \cdot b \cdot r$

Länge des Kreisbogens:

b = $\frac{\alpha}{360°} \cdot 2\pi r$



Bogenmaß:

Die Größe eines Winkels α kann im Gradmaß (α_{Deg}) oder im Bogenmaß (α_{Rad}) angegeben werden.
Das Bogenmaß eines Winkels α ist die Länge des zugehörigen Kreisbogens im Einheitskreis.

Es gilt: $\frac{\alpha_{Deg}}{360°} = \frac{\alpha_{Rad}}{2\pi}$

Kugel:

Für eine Kugel mit Radius r gilt:

Volumen: $V_{Kugel} = \frac{4}{3} r^3\pi$

Oberflächeninhalt: $O_{Kugel} = 4r^2\pi$

Beispiele:

- Der Flächeninhalt eines Kreissektors mit Radius r = 4 cm beträgt 18,4 cm². Berechne den Mittelpunktswinkel α des Kreissektors und die Länge des Kreisbogens!

$$\alpha = \frac{A \cdot 360°}{r^2\pi} = \frac{18{,}4cm^2 \cdot 360°}{(4cm)^2 \cdot \pi} \approx 131{,}8°$$

$$b = \frac{\alpha}{360°} \cdot 2\pi r = 9{,}2cm$$

- Besondere Werte:

Gradmaß	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
Bogenmaß	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π

- Der Oberflächeninhalt einer Kugel beträgt 100 cm². Bestimme das Volumen der Kugel!

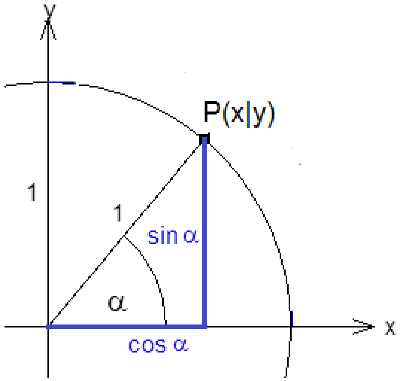
$$r = \sqrt{\frac{O_{Kugel}}{4\pi}} = \sqrt{\frac{100cm^2}{4\pi}} \approx 2{,}82cm$$

$$V = \frac{4}{3} r^3\pi \approx 94{,}0cm^3$$

M 10.2 Trigonometrie

Sinus und Kosinus am Einheitskreis:

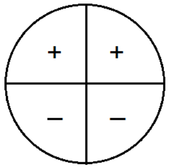
Ein Punkt P(x|y) auf dem Einheitskreis hat die Koordinaten x = cos α und y = sin α



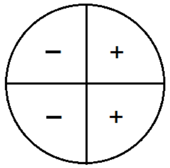
Werte von Sinus und Kosinus für beliebige Winkel:

Die Sinus- und Kosinuswerte haben für den spitzen Winkel α sowie für die Winkel 180°+α, 180°-α und 360°-α den gleichen Betrag.
Für die Vorzeichen gilt:

Sinus:



Kosinus:



- $sin\ 300° = sin\ (360° - 60°) = -\ sin\ 60° = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$
- $\cos 150° = \cos (180° - 30°) = -\cos 30° = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$
- $sin\ 135° = sin\ (180° - 45°) = sin\ 45° = \frac{1}{2}\sqrt{2}$

Winkel über 360° (Drehung über 360°):

sin (α + k·360°) = sin α

cos (α + k·360°) = cos α ; $k \in \mathbb{N}$

- $sin\ 765° = sin\ (2 \cdot 360° + 45°) = sin\ 45° = \frac{1}{2}\sqrt{2}$

Negative Winkel (Drehung im Uhrzeigersinn):

sin (– α) = sin (360° – α) = – sin α

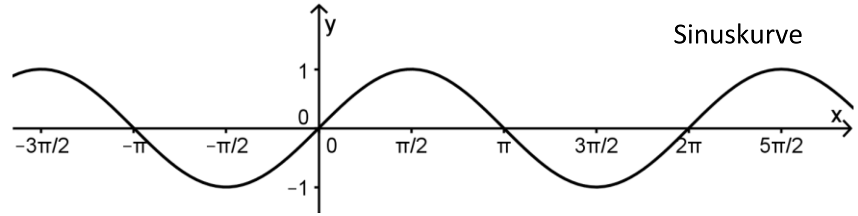
cos (– α) = cos (360° – α) = cos α

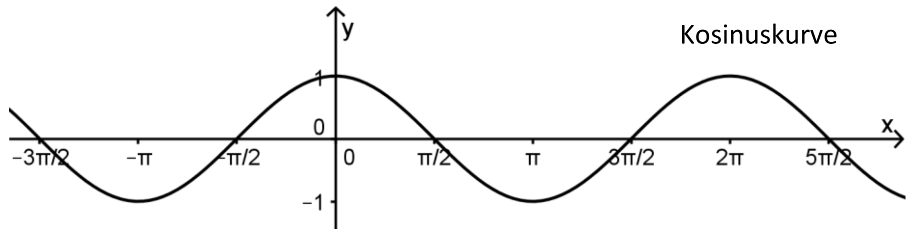
- $sin\ (-135°) = -sin\ 135° = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$
- $\cos(-150°) = \cos 150° = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$

Sinusfunktion und Kosinusfunktion:

- Sinusfunktion:
  $f(x) = \sin x$
  $D_f = \mathbb{R}$ $\quad W_f = [-1;1]$ $\quad$ Amplitude: 1
  Periode 2π: $\sin(x + k \cdot 2\pi) = \sin x$
  G_f punktsymmetrisch zum Ursprung: $\sin(-x) = -\sin x$

- Kosinusfunktion:
  $f(x) = \cos x$
  $D_f = \mathbb{R}$ $\quad W_f = [-1;1]$ $\quad$ Amplitude: 1
  Periode 2π: $\cos(x + k \cdot 2\pi) = \cos x$
  G_f achsensymmetrisch zur y-Achse: $\cos(-x) = \cos x$





Form und Lageänderung der Sinuskurve:

Die allgemeine Sinuskurve

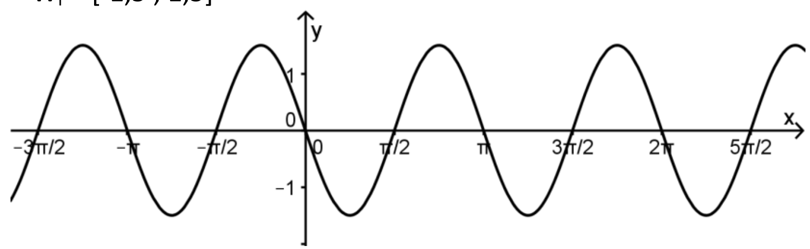
$$f(x) = a \cdot \sin[\mathrm{b} \cdot (\mathrm{x} + \mathrm{c})] + \mathrm{d}$$

entsteht aus der Sinuskurve *sin x:*

- Stauchung / Streckung in x-Richtung mit Faktor $\frac{1}{b}$ (Periode: $\frac{2\pi}{|\mathrm{b}|}$)
- Verschiebung in x-Richtung um $-$c (c > 0: Verschiebung nach links
  c < 0: Verschiebung nach rechts)
- Streckung / Stauchung in y-Richtung mit Faktor |a| (Amplitude: |a|)
- a < 0: Spiegelung an der x-Achse
- Verschiebung um d in y-Richtung

➢ Beschreibe, wie der Graph von $f(x) = 1{,}5 \cdot \sin[2 \cdot (x - \frac{\pi}{2})]$ aus der Sinuskurve entsteht!

- Stauchung in x-Richtung mit dem Faktor 0,5
- Periode: π
- Verschiebung in x-Richtung um $\frac{\pi}{2}$
- Streckung in y-Richtung mit dem Faktor 1,5
- W_f = [-1,5 ; 1,5]



M 10.3 Exponentielles Wachstum und Logarithmus

Lineares und exponentielles Wachstum:

- Lineares Wachstum:
  Pro Zeiteinheit nimmt der Bestand um denselben Wert d ab bzw. zu.
  $y = b + d \cdot x$
  b heißt Anfangsbestand.
  d beschreibt die konstante Abnahme ($d < 0$) bzw. den konstanten Zuwachs ($d > 0$).
- Exponentielles Wachstum:
  Pro Zeiteinheit nimmt der Bestand um denselben Faktor a ab bzw. zu.
  $y = b \cdot a^x$ ($a > 0$, $a \neq 1$)
  b heißt Anfangsbestand.
  a beschreibt den konstanten Wachstumsfaktor.
  $a > 1$: exponentielle Zunahme
  $0 < a < 1$: exponentielle Abnahme

Exponentialfunktion:

$$f(x) = b \cdot a^x \qquad (a > 0, a \neq 1, b \neq 0)$$

- $D_f = \mathbb{R}$ $\qquad W_f = \mathbb{R}^+$
- Schnittpunkt mit der y-Achse: $P(0|b)$
- Für $a > 1$: G_f steigend
  für $a < 1$: G_f fallend
- x-Achse ist Asymptote
- Graph von $f(x) = \left(\frac{1}{a}\right)^x$ geht aus dem Graphen von $g(x) = a^x$ durch Spiegelung an der y-Achse hervor

➢ In einer Regentonne befinden sich 3 Liter Wasser. Täglich tropfen 2 Liter Wasser in die Tonne. Wie viele Liter Wasser sind nach einer Woche insgesamt in der Regentonne?

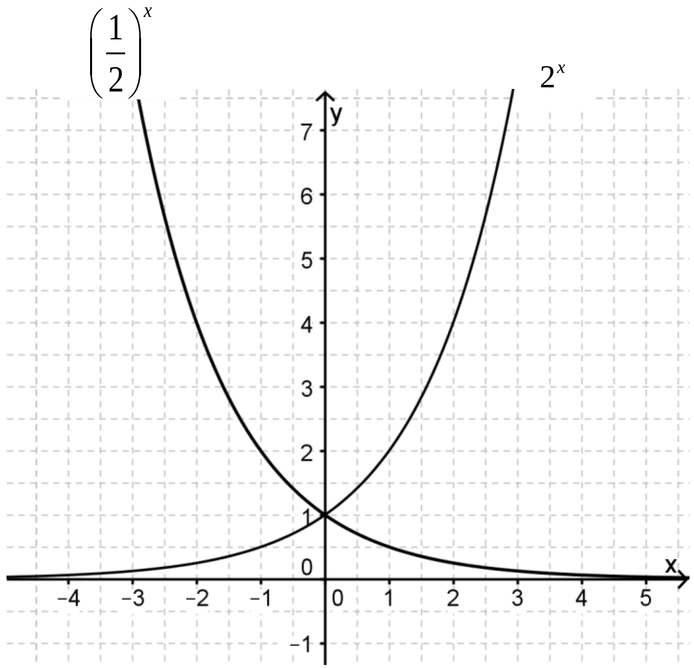
$y = 3 + 2 \cdot x \quad \Rightarrow \quad y = 3 + 2 \cdot 7 = 17$

Es sind nach einer Woche 17 Liter Wasser in der Tonne.

➢ Eine Bakterienkultur verdoppelt stündlich ihre Anzahl. Wie viele Bakterien sind nach 8 Stunden anzufinden, wenn es zu Beginn 4 Bakterien waren?

$y = 4 \cdot 2^x \quad \Rightarrow \quad y = = 4 \cdot 2^8 = 1024$

Nach 8 Stunden sind es 1024 Bakterien.



Logarithmus:

Für $a, b \in \mathbb{R}^+, a \neq 1$:

Der Logarithmus von b zur Basis a ist diejenige Zahl, mit der man a potenzieren muss, um b zu erhalten.

Schreibweise: $\log_a b$

Kurz: $a^x = b \quad \Leftrightarrow \quad x = \log_a b$

Merke: $\log_a 1 = 0 \qquad \log_a a = 1 \qquad \log_a a^x = x$

- $\log_3 243 = 5$, denn $3^5 = 243$

Rechenregeln für Logarithmen:

$u > 0, v > 0, a > 0, a \neq 1$:

1) $\log_a (u \cdot v) = \log_a u + \log_a v$
2) $\log_a (u : v) = \log_a u - \log_a v$
3) $\log_a u^x = x \cdot \log_a u$

Umrechnungsformel:

$$\log_a u = \frac{\lg u}{\lg a}$$

(lg u bezeichnet den Zehnerlogarithmus, d.h. den Logarithmus von u zur Basis 10)

- $\log_2 (32 \cdot 16) = \log_2 32 + \log_2 16 = 5 + 4 = 9$
- $\log_2 (1:4) = \log_2 1 - \log_2 4 = 0 - 2 = -2$
- $\log_2 \left(\frac{1}{16}\right)^6 = 6 \cdot \log_2 \frac{1}{16} = 6 \cdot (-4) = -24$

Exponentialgleichungen:

Gleichungen, bei denen die Unbekannte x nur im Exponenten auftritt, heißen Exponentialgleichungen.

Unterschiedliche Fälle und mögliche Lösungsstrategien:

- Umformen der Gleichung in die Form $a^x = b$
  $\Rightarrow \log_a b$ Lösung der Gleichung.

- Umformen der Gleichung, so dass auf beiden Seiten Produkte aus Zahlen und Potenzen stehen, anschließend Logarithmieren beider Seiten,
  $\Rightarrow$ Anwenden der Rechenregeln für Logarithmen führt zu linearer Gleichung

- Umformen der Gleichung, so dass auf beiden Seiten Potenz mit gleicher Basis steht
  $\Rightarrow$ Exponentenvergleich liefert Lösung

Löse folgende Exponentialgleichungen:

1)

$$3{,}5 \cdot 3^x = 7 \cdot 2^x$$

$$\left(\frac{3}{2}\right)^x = \frac{7}{3{,}5}$$

$$(1{,}5)^x = 2$$

$$x = \log_{1{,}5} 2 \approx 1{,}71$$

2)

$$2 \cdot 5^{2x} = 2^{x+3}$$

$$\lg(2 \cdot 5^{2x}) = \lg 2^{x+3}$$

$$\lg 2 + \lg 5^{2x} = (x+3) \cdot \lg 2$$

$$\lg 2 + 2\,\mathrm{x} \cdot \lg 5 = x \cdot \lg 2 + 3 \cdot \lg 2$$

$$2\,\mathrm{x} \cdot \lg 5 - x \cdot \lg 2 = 3 \cdot \lg 2 - \lg 2$$

$$\mathrm{x} \cdot (2\lg 5 - \lg 2) = 2\lg 2$$

$$x = \frac{2\lg 2}{2\lg 5 - \lg 2} \approx 0{,}55$$

3)

$$3^{4x-1} = 3^{-2} \cdot 27^x$$

$$3^{4x-1} = 3^{-2} \cdot 3^{3x}$$

$$3^{4x-1} = 3^{-2+3x}$$

$$\Rightarrow 4x - 1 = -2 + 3x$$

$$x = -1$$

M 10.4 Zusammengesetzte Zufallsexperimente

Bedingte Wahrscheinlichkeit:

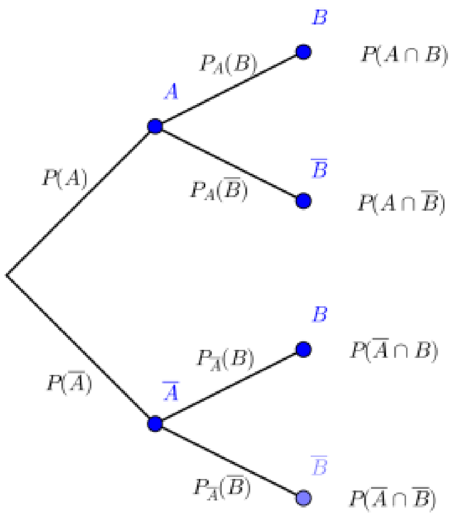
$P_A(B)$ beschreibt die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses B unter der Bedingung, dass das Ereignis A eingetreten ist:
Es gilt:

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \qquad \text{mit} \quad P(A) \neq 0$$

Vierfeldertafel und Baumdiagramm:

Zu jeder Vierfeldertafel gehören zwei unterschiedliche zweistufige Baumdiagramme, je nachdem welches Ereignis auf der ersten Stufe gewählt wird:

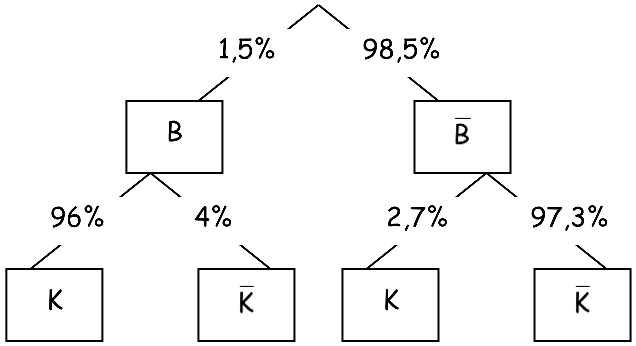
	A	$\bar{A}$	
B	$P(A \cap B)$	$P(\bar{A} \cap B)$	$P(B)$
$\bar{B}$	$P(A \cap \bar{B})$	$P(\bar{A} \cap \bar{B})$	$P(\bar{B})$
	$P(A)$	$P(\bar{A})$	1



➢ Eine ADAC-Untersuchung hat ergeben, dass in einer Wohngegend einem Autofahrer mit einer Wahrscheinlichkeit von 1,5% ein Ball vor das Auto rollt. Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Kind dem Ball nachläuft, beträgt 96%. Mit 2,7% läuft ein Kind vor das Auto, ohne dass zuvor ein Ball gerollt ist.

a) Erstelle ein Baumdiagramm und trage sämtliche Wahrscheinlichkeiten ein.
b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit rollt ein Ball auf die Straße und ein Kind folgt ihm?
c) Wie groß ist in einer Wohngegend generell die Wahrscheinlichkeit, dass ein Kind auf die Straße läuft?
d) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist zunächst ein Ball vor das Auto gerollt, wenn einem ein Kind vor das Auto läuft?

a) R: Ball rollt; K: Kind läuft



b) P(B und K) = 0,015 · 0,96 = 0,0144 = 1,44%

c) P(K) = P(B und K) + P($\bar{B}$ und K) ≈ 0,041 = 4,1%

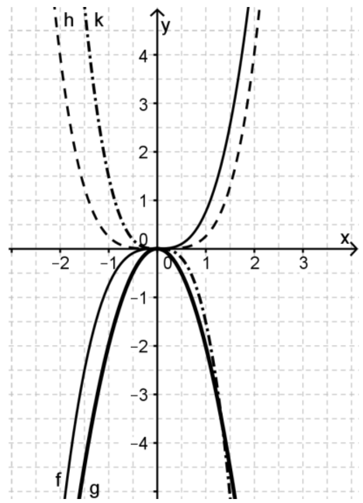
d) $P_K(B) = \frac{P(K \text{ und } B)}{P(K)} = \frac{0{,}0144}{0{,}041} = 35{,}12\%$

M 10.5 Ausbau der Funktionenlehre

Potenzfunktionen:

Funktionen der Form $f(x) = a \cdot x^n \;\; (n \in \mathbb{N})$ heißen Potenzfunktionen n-ten Grades.
Für gerade Exponenten sind die Graphen achsensymmetrisch zur y-Achse.
Für ungerade Exponenten sind die Graphen punktsymmetrisch zum Ursprung.

Verlauf von G_f für	n gerade	n ungerade
a > 0	von links oben nach rechtsoben	von links unten nach rechts oben
a < 0	von links unten nach rechts unten	von links oben nach rechts unten



$f(x) = 0{,}75x^3$

$g(x) = -2x^2$

$h(x) = 0{,}25x^4$

$k(x) = -1{,}5x^3$

Ganzrationale Funktionen:

Funktionen der Form $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$ mit $a_n \neq 0$ heißen ganzrationale Funktionen n-ten Grades.

- <u>Nullstellen ganzrationaler Funktionen</u>
  Ganzrationale Funktionen n-ten Grades besitzen höchstens n Nullstellen.

  Ist x_0 Nullstelle einer ganzrationalen Funktion f vom Grad n, dann lässt sich f(x) in der Form $f(x) = (x - a) \cdot g(x)$ schreiben.
  g(x) ist eine ganzrationale Funktion vom Grad n – 1.

  Den Faktor g(x) erhält man durch <u>Polynomdivision</u>:
  $g(x) = f(x) : (x - a)$

- <u>Vielfachheit von Nullstellen:</u>
  x_0 heißt k-fache Nullstelle einer Funktion f, wenn der Linearfaktor $(x - x_0)$ in der vollständig faktorisierten Form des Funktionsterms f k-mal vorkommt.
  $f(x) = (x - x_0)^k \cdot h(x)$ mit x_0 ist keine Nullstelle von h(x)

  Die Art der Nullstelle bestimmt das Verhalten der Funktionswerte links und rechts der Nullstelle:
  Nullstelle ungeradzahliger Vielfachheit: Vorzeichenwechsel
  Nullstelle geradzahliger Vielfachheit: kein Vorzeichenwechsel

- <u>Verhalten für betragsmäßig große x-Werte:</u>
  Ausschlaggebend hierfür ist der Term mit der höchsten x-Potenz in der ausmultiplizierten Form des Funktionsterms ($a_n x^n$).

- Erste Nullstelle durch Probieren: $x_1 = 2$

Polynomdivision: $(x^3 - x^2 - 4x + 4) : (x-2) = x^2 + x - 2$

$\underline{-(x^3 - 2x^2)}$

$x^2 - 4x$

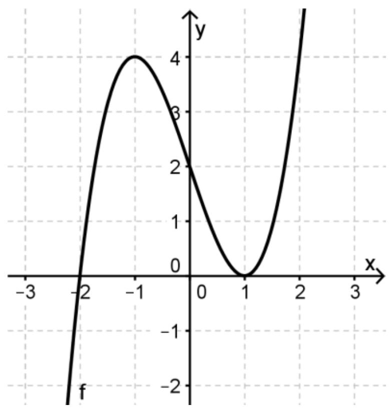
$\underline{-(x^2 - 2x)}$

$-2x + 4$

$\underline{-(-2x + 4)}$

$-\;\;-$

Mitternachtsformel: $x^2 + x - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_2 = 1;\; x_3 = -2$



- $f(x) = (x - 1)^2 \cdot (x + 2)$

x = 1: doppelte Nullstelle
$\Rightarrow$ kein Vorzeichenwechsel

x = -2: einfache Nullstelle
$\Rightarrow$ Vorzeichenwechsel

Symmetrie von Funktionsgraphen:

Gilt für alle $x \in D_f$:

$f(-x) = f(x) \quad \Rightarrow$ G_f ist achsensymmetrisch zur y-Achse

$f(-x) = -f(x) \quad \Rightarrow$ G_f ist punktsymmetrisch zum Ursprung

Grenzwerte im Unendlichen:

Nähern sich die Funktionswerte f(x) einer Funktion f für beliebig groß werdende x-Werte einer Zahl a beliebig genau an, heißt a Grenzwert (Limes) der Funktion f für x gegen plus unendlich ($x \to +\infty$).

Schreibweise: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = a$

Die Gerade y = a ist waagrechte Asymptote des Graphen von f.

Entsprechend ist $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ definiert.

Einfluss von Parametern auf Funktionsgraphen:

- g(x) = a · f(x) , (a ≠ 0)

  |a| > 1 : Streckung in y-Richtung mit dem Faktor a
  |a| < 1 : Stauchung in y-Richtung mit dem Faktor a

  Für a < 0: zusätzlich Spiegelung an der x-Achse

- h(x) = f(x) + d

  Verschiebung um d in y-Richtung

- k(x) = f(b · x) , (b ≠ 0)

  |b| > 1 : Stauchung in x-Richtung mit dem Faktor $\frac{1}{b}$

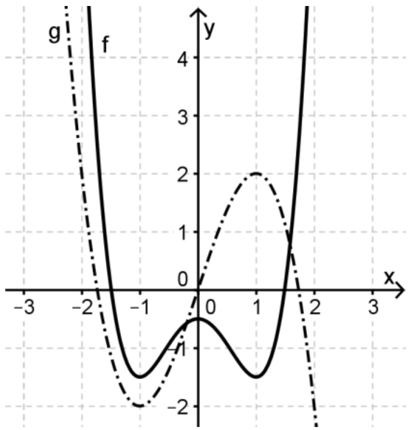
  |b| < 1 : Streckung in x-Richtung mit dem Faktor $\frac{1}{b}$

  Für b < 0: zusätzlich Spiegelung an der y-Achse

- q(x) = f(x + c)

  Verschiebung um –c in x-Richtung

- Symmetrie



f(x) = $x^4 - 2x^2 - 0{,}5$

f(–x) = f(x) $\Rightarrow$ G_f ist achsensymmetrisch zur y-Achse

g(x) = $-x^3 + 3x$

g(–x) = – g(x) $\Rightarrow$ G_g ist punktsymmetrisch zum Ursprung

- Bestimme den Grenzwert von f(x) für x gegen plus unendlich!

  $f(x) = 3 - \frac{2}{x}$

  $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} (3 - \frac{2}{x}) = 3$

  y = 3 ist waagrechte Asymptote

- Einfluss von Parametern auf Funktionsgraphen

  Vgl. Form und Lageänderung der Sinuskurve

Spiegeln von Funktionsgraphen:

- $g(x) = -f(x)$

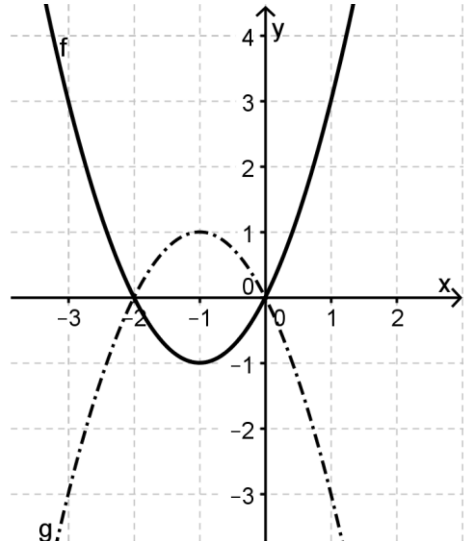
  Der Graph von g geht aus dem Graphen von f durch Spiegelung an der x-Achse hervor.

- $h(x) = f(-x)$

  Der Graph von h geht aus dem Graphen von f durch Spiegelung an der y-Achse hervor.

➢ $f(x) = x^2 + 2x$
$g(x) = -x^2 - 2x$

$g(x) = -f(x)$
$\Rightarrow$ G_g entsteht aus G_f durch Spiegelung an der x- Achse



➢ $f(x) = x^2 + 2x$
$h(x) = x^2 - 2x$

$h(x) = f(-x)$
$\Rightarrow$ G_h entsteht aus G_f durch Spiegelung an der y- Achse